11. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(abzugeben am Donnerstag, 05.07.2007)

Aufgabe H30 *Ortsoperator eines kräftefreien relativistischen Teilchens* (4 Punkte)

Berechnen Sie im Heisenbergbild die Zeitentwicklung des Ortsoperators $\vec{x}(t)$ eines kräftefreien relativistischen Teilchens und vergleichen Sie diese mit der aus der relativistischen Punktmechanik folgenden Bahn

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \vec{v}\,t \qquad \text{mit} \qquad \vec{v} = c^2\vec{p}/E \qquad \text{und} \qquad E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2}\ .$$

Der quantenmechanische Zusatzterm wird als „Zitterbewegung“ interpretiert.
Anleitung:
Für jede Observable gilt in einem festen Inertialsystem $\dot{M} = \frac{i}{\hbar}[H, M]$ mit dem Diracschen Hamiltonoperator $H = c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta$. Leiten Sie für $\vec{\alpha}(t)$ die Differentialgleichung

$$\dot{\vec{\alpha}}(t) = -\frac{2\mathrm{i}}{\hbar}\left(\vec{\alpha}(t) - c\vec{p}H^{-1}\right)H$$

her und integrieren Sie diese. Berechnen Sie daraus $\vec{x}(t)$. H und $\vec{p}$ sind Konstanten der Bewegung.

Aufgabe H31 *Elektron im homogenen Magnetfeld* (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Energieeigenwerte eines Elektrons in einem homogenen Magnetfeld in z-Richtung (die sogenannten Landau-Niveaus), indem Sie aus der stationären Diracgleichung die „kleinen Komponenten“ φ_b eliminieren und das Eigenwertproblem der „großen Komponenten“ φ_a auf das eines eindimensionalen harmonischen Oszillators zurückführen.
Hinweise:
Setzen Sie $c = 1$. Benutzen Sie die Eichung $\vec{A} = xB\vec{e}_y$. Neben dem kanonischen Impuls $\vec{p}$ definiert man den „kinematischen Impuls“ $\vec{\pi} := \vec{p} - e\vec{A}$. Zeigen Sie allgemein, daß die Beziehung $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}) = \vec{\pi}^2 - \hbar e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ gilt, und setzen Sie dann das obige spezielle Vektorpotential ein. Machen Sie zur Lösung des Eigenwertproblems für φ_a einen geeigneten Produktansatz der Form $\varphi_a(\vec{x}) = u(x)g(y, z)$. Nehmen Sie für $g(y, z)$ Eigenfunktionen von p_y, p_z und σ_z.

b.w.

Aufgabe H32 *Eindimensionales Streuproblem für polarisierte Spins* (6 Punkte)

Man betrachte das eindimensionale Streuproblem an der Potentialstufe

$$e\,\phi \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für} \quad z < 0 \\ V_0 > 0 & \text{für} \quad z \geq 0 \end{cases}$$

mit Hilfe der Diracgleichung. Die einlaufende Welle für in positive z-Richtung polarisierte Spins lautet

$$\psi_e \;=\; A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \qquad \text{mit} \quad \eta \;:=\; \frac{\hbar\omega - mc^2}{c\hbar k}$$

und habe die Energie $E > V_0 + mc^2$. Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten $R = |\vec{j}_r|/|\vec{j}_e|$ und den Transmissionskoeffizienten $T = |\vec{j}_t|/|\vec{j}_e|$, wobei $\vec{j} = c\,\psi^\dagger \vec{\alpha}\psi$ die Stromdichte der einfallenden (e), reflektierten (r) bzw. transmittierten (t) Welle ist. Beachten Sie, daß ω und k (und damit η) für die transmittierte Welle andere Werte haben als für die einfallende und die reflektierte Welle.
Zeigen Sie, daß R und T im nichtrelativistischen Grenzfall in die Ergebnisse der Schrödinger-Theorie übergehen, nämlich

$$R = \frac{(1-\varrho_s)^2}{(1+\varrho_s)^2}\;, \quad T = \frac{4\varrho_s}{(1+\varrho_s)^2} \qquad \text{mit} \qquad \varrho_s \;:=\; \sqrt{(E_s - V_0)/E_s}\;, \quad E_s \;:=\; E - mc^2\;.$$

Erhöht oder erniedrigt die relativistische Korrektur den Transmissionskoeffizienten?
Anleitung:
Benutzen Sie den relativistischen Energiesatz $c^2\hbar^2k^2 = (E - e\phi)^2 - m^2c^4$. Die Eigenzustände zu positiver ($\vec{\sigma} \uparrow\uparrow \vec{p}$) bzw. negativer ($\vec{\sigma} \uparrow\downarrow \vec{p}$) Helizität lauten

$$|+\rangle \;\doteq\; \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad |-\rangle \;\doteq\; \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix}\;.$$

Benutzen Sie als Ansatz für die reflektierte und transmittierte Welle eine Linearkombination von Eigenzuständen zu positiver und negativer Helizität mit entsprechender Phase und schließen Sie die Spinoren bei $z = 0$ stetig an. Achtung: Die Diracgleichung ist nur von erster Ordnung, also müssen die Ableitungen nicht passen.